Badji Mokhtar university of Annaba **S.T. 2**
Numerical Methods . **University year 2025/2026**

Series of tutorial exercises n° 4

Exercise 1 Let be the following system of linear equations

$$(S1)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

1- Write this system in matrix form $Ax = b$ and show that it has a unique solution.
2- Solve this system using Gauss's method, and deduce the value of the determinant of A.
3- Using Jordan's method, find the solution to this system and the inverse matrix A^{-1}.

Exercice 2 Given the following system

$$(S2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

1- Write this system in matrix form $Ax = b$ and show that it has a unique solution.
2- Can the matrix A be decomposed into the form $A = L.U$, where L is a lower triangular matrix and U is a upper triangular matrix?
3- If the answer is yes, solve the system using Doolittle's method and deduce the value of the determinant of A.

Exercice 23 Given the following system

$$(S3)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

1- Write this system in matrix form $Ax = b$ and show that it has a unique solution.
2- Can the matrix A be decomposed into the form $A = L.L^t$, where L is a lower triangular matrix?
3- If the answer is yes, solve the system using Doolittle's method and deduce the value of the determinant of A.

Série n° 4

<u>Exercice 1</u> Soit le système d'équations linéaires suivant

$$(S1)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -4 \end{cases}$$

1- Ecrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ et montrer qu'il admet une solution unique.
2- Résoudre ce système par la méthode de Gauss, en déduisant la valeur du déterminant de A.
3- En utilisant la méthode de Jordan, trouver la solution de ce système et la matrice inverse A^{-1}.

<u>Exercice 2</u> Soit le système d'équations linéaires suivant

$$(S2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

1- Ecrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ et montrer que ce système admet une solution unique.
2- Peut – on décomposer la matrice A sous la forme $A = L.L^T$, où L est une matrice triangulaire inférieure?
3- Si la réponse est oui, résoudre ce système par la méthode de Cholesky, en déduire la valeur du déterminant de A.

<u>Exercice 3</u> Soit donné le système suivant

$$(S3)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

1- Ecrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$ et montrer que ce système admet une solution unique.
2- Peut – on décomposer la matrice A sous la forme $A = L.U$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure?
3- Si la réponse est oui, résoudre ce système par la méthode de Doolittle, en déduire la valeur du déterminant de A.

Résolution

Exercice 1

1- La forme matricielle de ce système est

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution unique si et seulement si $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -45 \neq 0 \Leftrightarrow \text{ ce système admet une solution unique.}$$

2- La résolution avec la méthode d'élimination de Gauss.

(a) Triangularisation

Le principe de cette méthode est de transformer par équivalence la matrice A vers une matrice triangulaire inférieure. Pour obtenir un système triangulaire équivalent à (S1), les opérations faites sur A doivent être faites aussi sur le vecteur B. Dans ce cas, la matrice augmentée

$$(A|\, b) \sim \left(\begin{array}{llll|l} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & a'_{34} & b_{3'} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{44} & b'_4. \end{array}\right)$$

Donc, on doit éliminer les termes de A qui sont en bas de la diagonale et cette élimination sera faite par colonne.

Première étape d'élimination: Pour éliminer les trois dernier éléments de la première colonne, on se pose la question suivante

- *Par quel scalaire λ peut - on multiplier la première ligne telle que la somme avec la ligne considérée nous donne le* 0 *voulu à l'endroit voulu?*

On obtient dans ce cas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 9 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow l_1 + l_2 \\ \leftarrow (-2)\, l_1 + l_3 \\ \leftarrow l_1 + l_4. \end{array}$$

Deuxième étape d'élimination: Pour qu'on puisse continuer l'élimination on doit changer la 2ième ligne en éffectuant une permutation entre cette ligne et la 3ième ou bien la 4ième ligne, car le 2ième élément de la diagonale $= 0$, ce qui nous permet d'avoir la nouvelle matrice augmentée équivalente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -27 & -14 & -23 \end{array}\right) . \leftarrow 5l_2 + l_4$$

et cela en se posant la question suivante:
- *Par quel scalaire λ peut-on mutiplier la* <u>*2ième ligne*</u> *telle que la somme avec la dernière ligne nous donne* 0 *au lieu de* 5*?* (Il n'y a pas de changement dans la 3ième ligne)

Troixième étape d'élimination: Enfin, pour la dernière étape on a un seul changement à faire dans la dernière ligne et cela en se posant la question
- *Par quel scalaire λ peut-on mutiplier la* <u>*3ième ligne*</u> *telle que la somme avec la dernière ligne nous donne* 0 *au lieu de* (-27)*?*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -5 \end{array}\right) . \leftarrow 3l_3 + l_4.$$

(b) <u>**Résolution du système teriangulaire équivalent**</u>
D'après le résultat de la triangularisation, le système (S1) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 - 7x_3 - 4x_4 = -4 \\ 9x_3 + 3x_4 = 6 \\ -5x_4 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow . \left\{\begin{array}{c} x_1 = 13/3 \\ x_2 = -7/3 \\ x_3 = 1/3 \\ x_4 = 1 \end{array}\right.$$

D'aprés l'élimination de Gauss le déterminant de la matrice A est donné par

$$\det A = (-1)^p \prod_{k=0}^{n} a_{kk}^{(k)} = (-1)^p \times 1 \times (-1) \times 9 \times (-5) = -45,$$

où $p =$ nombre des permutations faites durant cette opération et les $a_{kk}^{(k)}$ sont les pivots de Gauss, c'est à dire les diagonaux de la matrice triangulaire équivalent à A

3- La méthode de Jordan est la généralisation de celle de Gauss, qui consiste à transformer par équivalence (S1) vers un système diagonal. Comme on va aussi déterminer la matrice inverse de A, on doit avoir des équivalences de la forme

$$\left(A \mid b \mid I \right) \sim \left(D \mid b' \mid A' \right) \sim \left(I \mid X \mid A^{-1} \right),$$

où D est une matrice diagonale et I est la matrice idendité d'ordre 4, cela en utilisant le même raisonnement que la méthode de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 9 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -4 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow l_1 + l_2 \\ \leftarrow (-2)\, l_1 + l_3 \\ \leftarrow l_1 + l_4. \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Permutation} \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -4 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 0 & -16 & -10 & -11 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -4 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & -14 & -23 & -9 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow 3l_2 + l_1 \\ \\ \\ \leftarrow 5l_2 + l_4 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -14/3 & -1/3 & -29/9 & 16/9 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -0 & -5/3 & 2/3 & -11/9 & 7/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -5 & -6 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow (16/9)\, l_3 + l_1 \\ \leftarrow (7/9)\, l_3 + l_2 \\ \\ \leftarrow 3l_3 + l_4. \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 13/3 & 107/9 & -46/45 & -5/3 & -14/15 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 7/3 & 7/9 & -2/9 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{9} & 0 & 3 & -13/5 & 14/5 & 3 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -5 & -6 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow (-14/15)\, l_4 + l_1 \\ \leftarrow (-1/3)\, l_4 + l_2 \\ \leftarrow (3/5)\, l_4 + l_3 \\ . \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 13/3 & 107/45 & -46/45 & -5/3 & -14/15 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -7/3 & -7/9 & 2/9 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1/3 & -13/45 & 14/45 & 1/3 & 1/15 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 6/5 & -3/5 & -1 & -1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow (-1)\, l_2 \\ \leftarrow (1/9)\, l_3 \\ \leftarrow (-1/5)\, l_4. \end{array}$$

Par conséquent

$$X = \begin{pmatrix} 13/3 \\ -7/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 107/45 & -46/45 & -5/3 & -14/15 \\ -7/9 & 2/9 & 2/3 & 1/3 \\ -13/45 & 14/45 & 1/3 & 1/15 \\ 6/5 & -3/5 & -1 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Pour le déterminant de A on a le même résultat que celui donné par la méthode de Gauss, car les pivots de Jordan sont ceux de Gauss.

*

Exercice 2

1- La forme matricielle $AX = b$ associée à (S2) est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, alors ce système admet une solution unique.

2- On sait que, si la matrice A est symétrique et définie positive, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L telle que $A = L.L^T$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, alors elle est symétrique.

- A est définie positive si et seulement si $\langle Ax, x\rangle > 0$, pour tout vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^3$, où $\langle ., .\rangle$ est la notation du produit scalaire.

$$\begin{aligned} \langle Ax, x\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 (2x_1 - x_2 + x_3) + x_2 (-x_1 + 2x_2 - x_3) + x_3 (x_1 - x_2 + 2x_3) \\ &= 2x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 + x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= \left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \left(x_1 + 2x_1x_3 + x_3^2\right) + \left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 > 0 \end{aligned}$$

pour $x \neq (0, 0, 0)^T$. Donc cette matrice est définie positive.
Par conséquent la décomposition $A = L.L^T$ est possible.

3- <u>La résolution de (S2) avec la méthode de Cholesky.</u>
(a) Détermination de L.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par identification on obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 2 \\ l_{11}l_{21} = -1 \\ l_{11}l_{31} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{11} = \sqrt{2} \text{ (choix)} \\ l_{12} = -\sqrt{2}/2 \\ l_{13} = \sqrt{2}/2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21}^2 + l_{22}^2 = -2 \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{22} = \sqrt{6}/2 \\ l_{32} = -\sqrt{6}/6 \end{cases}$$

et

$$l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2=2 \Rightarrow l_{33}=2\sqrt{3}/3.$$

Donc

$$L=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \text{ et } L^T=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Résolution du système.*

On a $AX=b \Leftrightarrow \left(L.L^T\right)X=b \Leftrightarrow L\left(L^TX\right)=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b & (*) \\ L^TX=y & (**) \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}y_1=1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{6}}{2}y_2=2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}y_1-\frac{\sqrt{6}}{6}y_2+\frac{2\sqrt{3}}{3}y_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_2=\frac{5}{6}\sqrt{6} \\ y_3=\frac{5}{3}\sqrt{3} \end{cases}$$

et

$$(**)\quad L^TX=Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{5}{6}\sqrt{6} \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2}x_2-\frac{\sqrt{6}}{6}x_3=\frac{5}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_3=\frac{5\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{5}{2} \\ x_3=\frac{5}{2}. \end{cases}.$$

Donc $X=(1/2\ ,\ 5/2\ ,\ 5/2)^T$.

Pour le déterminant , on a

$$\begin{aligned} \det A &= \det L\times\det L^T=(\det L)^2=\prod_{k=1}^{3}l_{kk}^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=4. \end{aligned}$$

Exercice 3

1- La forme matricielle $AX = b$ associée à (S3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ce système admet une solution unique $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16 \neq 0, \text{ alors (S3) admet une solution unique.}$$

2- On sait que, A peut s"écrire sous la forme $A = L.U$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure si et seulement si les $\det A_k \neq 0, k = 1.2$ et 3.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \Rightarrow \det A_1 = 1 \neq 0, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_3 = 5 \neq 0 \text{ et} \\ A_3 &= A \Rightarrow \det A_3 = 16 \neq 0. \end{aligned}$$

Donc la décomposition $A = L.U$ est possible.

3- La résolution de ce système avec l'**algorithme de Doolittle** cela veut dire que les termes diagonaux de L sont tous égale à 1.

(a) La détermination de L et **U**.Dans ce cas on peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases} u_{11} = 1 \\ u_{12} = 3 \\ u_{13} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21}u_{11} = -1 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = -2 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = -1 \\ u_{22} = 1 \\ u_{23} = 3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} l_{31}u_{11} = 2 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{31} = 2 \\ l_{32} = -5 \\ u_{33} = 16. \end{cases}$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(b) Résolution de (S3) Avec cette décomposition on peut avoir lescéquivalences suivantes

$$AX = b \Leftrightarrow (LU)\, x = b \Leftrightarrow L\,(UX) = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b & (*) \\ UX = Y & (**) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ -y_1 + y_2 = 2 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 11 \end{cases}$$

et

$$(**) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + 3x_3 = 3 \\ \quad\quad\quad 16x_3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 15/16 \\ x_3 = 11/16. \end{cases}$$

Par conséquent la solution $X = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/16 \\ 11/16 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{2}\, , \, \frac{15}{16}\, , \, \frac{11}{16} \right)^T.$

Le déterminant de A est donné par

$$\det A = \det L \times \det U = \det U = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} = 16.$$