Université Badji Mokhtar — **$2^{ème}$ Année S.T.**
Méthodes Numériques — **Année universitaire 2023/2024**

Examen (Durée 1h 30)

Questions de cours **(01.5 points)**
1) Ecrire l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange pour une fonction f aux points x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.
2) Ecrire l'expression du polynôme d'interpolation de Newton pour une fonction f aux points x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Exercice 1 **(05.5 points)** Soit donnée l'équation $f(x) = x^3 - 5x + 3 = 0$
1- Montrer que cette équation admet une racine α appartenant à l'intervalle $[0.1, 1]$.
2- Montrer qu'avec un choix convenable de la valeur initiale x_0, l'algorithme de Newton – Raphson converge.
3- Calculer une valeur approchée de α, avec cette méthode, à 10^{-4} prés.

Exercice 2 **(06 points)** On considère l'intégrale suivant

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

1- Donner une valeur approchée de I, pour $n = 10$, en utilisant:

(a) La formule des trapèzes (b) La formule de Simpson.

2- Comparer les résultats trouvés avec la valeur exacte.

Exercice 3 **(07 points)** Soit donné le système

$$(S)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

1- Ecrire ce système sous la forme matricielle $Ax = b$, puis montrer qu'il admet une solution unique.
2- Peut – on décomposer la matrice A sous la forme $A = L.U$, où L est une matrice triangulaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure?
3- Si la réponse est oui, résoudre ce système par la méthode de Croût.

Corrigé type.

Questions de cours **(01.5 points)**

1) Le polynôme d'interpolation de Lagrange pour une fonction f aux points x_i, $i = 0, 1, \ldots, , n,$ est donné par la relation

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x) \quad \text{pour tout } x \in [\min\{x_i\}, \max\{x_i\}],$$

où $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ et $y_i = f(x_i) \qquad \longleftarrow \quad (\mathbf{0.75\ pt})$

2) Le polynôme d'interpolation de Newton pour une fonction f aux points x_i, $i = 0, 1, \ldots, n,$ est donné par la relation

$$\Pi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \cdots, x_i] .w_i(x),$$

où $w_0(x) = 1, w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$, pour $n \geq 0$ et $f[x_0, x_1, \cdots, x_i]$ désigne la i-ième différence divisée de Newton de f définie par la récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} f[x] = f(x_i) = y_i, \ , f[x_i, x_j] = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}, \quad \text{pour } i \neq j, \\ \text{et } f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}, \quad \text{pour } i \neq j \neq k \end{array} \right. \qquad \longleftarrow \quad (\mathbf{0.75\ pt})$$

Exercice 1 → (05.5 **pts**)

1- Appliquant le théorème des valeurs intermédiaires.→ (**0.25 pt**)

♦ **Existencce**

$$\left. \begin{array}{c} f(0.1) = 2.51 > 0 \rightarrow (\mathbf{0.25\ pt}) \\ f(1) = -1 < 0 \rightarrow (\mathbf{0.25\ pt}) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in]1, 2[\text{ tel que } f(\alpha) = 0. \rightarrow (\mathbf{0.25\ pt})$$

♦ **Unicité** $f'(x) = 3x^2 - 5$ ($\rightarrow$ **0.25 pt**) $= 3\left(x - 5\sqrt{3}/3\right)\left(x + 5\sqrt{3}/3\right)$, alors $f'(x) < 0$ sur $[0, 1] \rightarrow$ (**0.25 pt**) $\Rightarrow \alpha$ est unique.→ (**0.25 pt**)

2-L'algorithme de Newton − Raphson est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \text{ approximation initiale} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \end{array} \right. \qquad \rightarrow (\mathbf{0.25\ pt})$$

♦ **Convergence de l'algorithme** Si $f \in C^2[a, b]$, si f' et f" gardent des des signes constants sur $[a, b]$ et x_0 vérifie la condition $f(x_0).f"(x_0) > 0$, alors l'algorithmre de Newton – Raphson converge vers α, .→ (**0.5 pt**)

On a $f \in C^2[0,1]$ telle que $f'(x) = 3x^2 - 5 < 0 \to$ (**0.25 pt**) et $f"(x) = 6x > 0$ sur $[0.1, 1] \to$ (**0.25 pt**) . Alors la convergence de l'algorithme est assurée si on pred $x_0 = 0.1 \to$ (**0.25 pt**)
3-Le calcul de la valeur approchée en utilusant le test d'arrêt est $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-4} \to$ (**0.25 pt**)

$x_1 = 0.693762576 \to$ (**0.5 pt**)	$x_3 = 0.656620098 \to$ (**0.5 pt**) , $\|x_3 - x_2\| > 10^{-4}$
$x_2 = 0.65582743 \to$ (**0.5 pt**)	$x_4 = 0.656620431 \to$ (**0.5 pt**) , $\|x_5 - x_4\| < 0.3.10^{-6}$

Donc $\boxed{\alpha = 0.656620431}$. à 10^{-4} prés ou bien avec 6 c.s.e

Exercice 2 $\to$ (**6 pts**) Soit donner l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx.$$

.1- (a) La formule des trapèzes est donnée par la formule

$$I_T = h\left(y_0/2 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + y_n/2\right),$$

où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $y_i = f(x_i)$ et où $x_i = a + ih$ pour $i = 1, \cdots n. \to$ (**0.5 pt**)

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_i	1	1.08910891	1.15384615	1.19266055	1.20689655	1.2	1.17647059

0.7	0.8	0.9	1
1.1409396	1.09756098	1.04972378	1.

$\to \begin{pmatrix} (\mathbf{0.25\ pt}) \\ \times\ \mathbf{10} \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{I_T = 1.130720124.} \to$ (**0.25 pt**)
(b) Si n est pair, la formule de Simpson est donnée par,

$$I_S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2 + y_n\right),$$

où $\sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}$ et $\sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}. \to$ (**0.5 pt**)
Donc

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1 = y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 5.67243284 \to (\mathbf{0.25\ pt}) \\ \sigma_2 = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 4.63477427 \to (\mathbf{0.25\ pt}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{I_s = 1.131975997} \to (\mathbf{0.25\ pt}).$$

2- **Valeur exacte:**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \to (\mathbf{0.25\ pt}) \\ &= \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1 \to (\mathbf{0.5\ pt}) \\ &= 1.131971754 \to (\mathbf{0.25\ pt}) \end{aligned}$$

On remarque que $|I_T - I| \approx 0.125 \times 10^{-2}$, alors I_t est valeur approchée au centième prés$\rightarrow$ (**0.25 pt**), par contre $|I_S - I| \approx 0.43 \times 10^{-5}$, alors on a 6 c.s.e $\rightarrow$ (**0.25 pt**)

Exercice 3

1- La forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \textbf{(1 pt)}$$

Ce système admet une solution unique $\Longleftrightarrow$.det $A \neq 0 \rightarrow$ (**0.25 pt**)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 - 8 + 4 = -1 \neq 0 \rightarrow (\textbf{0.75 pt}) \end{aligned}$$

donc ce système admet une solution unuique.

2- La matrice A peu se décomposer sous la forme $A = L.U$ si et seulement si $\det A_k \neq 0$, où $A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^{k}$, pour tout $k = 1, 2, \cdots n$. $\rightarrow$ (**0.25 pt**)

$\det A_1 = A_1 = 1 \neq 0,$ (**0.25 pt**) $\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ (**0.25 pt**) et $\det A_3 = \det A = -1 \neq 0$.

D'où le resultat voulu.

3- **Algorithme de Croùt** $\Leftrightarrow$ les éléments de la diagonale de U prennent la valeur 1 et donc, si on veut résoudre (S_1) par cet algorithme on peut écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\textbf{0.25 pt}) \\ &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12} + l_{22} & l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12} + l_{32} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{pmatrix} \rightarrow (\textbf{0.5 pt}). \end{aligned}$$

Par identification on obtient

$$\begin{cases} l_{11} = 1 \\ l_{11}u_{12} = 2 \\ l_{11}u_{13} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{11} = 1 \\ u_{12} = 2 \\ u_{13} = -2, \end{cases} \rightarrow (\textbf{0.75 pt})$$

$$\begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{21}u_{12} + l_{22} = 1 \\ l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{22} = -3 \\ u_{23} = -5/3 \end{cases} \rightarrow (\textbf{0.75 pt})$$

et

$$\begin{cases} l_{31} = 0 \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = -1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_{31} = 0 \\ l_{32} = -1 \\ l_{33} = 1/3. \end{cases} \rightarrow (\textbf{0.75 pt})$$

Donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système $(s1)$

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (*) \\ ux = y & (**) \end{cases} \rightarrow (\mathbf{0.25\ pt})$$

On a

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 - 3y_2 = 2 \\ -y_2 + \dfrac{1}{3}y_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 3 \end{cases} \rightarrow (\mathbf{0.5\ pt}) \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

et.

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - \dfrac{5}{3}x_3 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 3 \end{cases} \rightarrow (\mathbf{0.5\ pt}) \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$