Tronc commun ST Ingénieur
2ème année
Analyse 3

TD 1 Analyse vectorielle

Exercice 1.

1. Soit le champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ par $f(M) = f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z$. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$ au point $(1,-2,-1)$.

2. Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\overrightarrow{F}(M) = \left(x^2z, -2y^3z^2, xy^2z\right)$. Calculer div $\overrightarrow{F}(M)$ au point $(1,-1,1)$.

3. Soit le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\overrightarrow{F}(M) = \left(xz^3, -2x^2yz, 2yz^4\right)$. Calculer $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}(M)$ au point $(1,1,0)$.

Exercice 2.

1. On définit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = (ax, ay, az)$ où a est une constante.

Calculer div $\overrightarrow{V}$, représenter le champ de vecteurs pour $a > 0$, puis pour $a < 0$. En déduire une interprétation géométrique de la divergence.

Exercice 3.

1. Calculer la circulation du champ vectoriel $\overrightarrow{V}(x,y) = (3x, x+y)$ le long du cercle C de centre 0 et de rayon 1, parcouru dans le sens positif.

2. Meme question pour le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$
et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{V} = (y^2\cos x, 2y\sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$.

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.

2. Déterminer le potentiel U dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.

3. Quelle est la circulation de ce champ de $A = (0,1,0)$ à $B = (\pi/2, 3, 0)$.

Exercice 5.

1. Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire et trouver les potentiels dont il dérive dans les cas suivants.

1a. $\overrightarrow{F} = \left(3x^2 + 3y - 1, z^2 + 3x, 2yz + 1\right)$.

1b. $\overrightarrow{F} = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)$ défini sur $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{V} = \left(xy^2 - x^3y\right)\overrightarrow{k}$ admet un potentiel vectoriel et le déterminer.

Exercice 6.

1. En utilisant la formule de Green, calculer $I = \iint\limits_S xy\,dx\,dy$ où

$$S = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}.$$

2. Vérifier la formule de Green dans le plan pour $\oint\limits_C \left(xy + y^2\right)dx + x^2dy$, où C est la courbe fermée délimitée par $y = x$ et $y = x^2$.

Exercice 7.

1. Calculer $\oint\limits_C (y - \sin x)\, dx + \cos x dy$, où C est le triangle de sommets $(0,0)\,, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)\,, \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

1.a. directement.

1.b. en appliquant la formule de Green.

2. a) Dessiner le domaine D, délimité par les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$.

b. Calculer directement $\oint\limits_C \left(2xy^2 - x^2\right) dx + \left(x + y^2\right) dy$, où C est le bord orienté du domaine D.

c. Retrouver le résultat en utilisant la formule de Green.

Exercice 8. Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{F} = \frac{-y}{x^2+y^2} i + \frac{x}{x^2+y^2} j$.

1. Calculer $\bigtriangledown \wedge \overrightarrow{F}$. Est ce que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire?

2. Evaluer $\oint\limits_C \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$ où C est une courbe quelconque fermée et expliquer le resultat.

Exercice 9.

Calculer les intégrales suivantes en appliquant la formule de Stokes puis retrouver le résultat par calcul direct.

1.

$$I = \int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$$

où la courbe C est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et le plan $x + y + z = 0$, on suppose que C est orientée positivement.

2.

$$J = \int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

où la courbe C est l'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et le plan $x + y + z = 1$, on suppose que C est orientée positivement.

Exercice 10. Soit le champ vectoriel $\overrightarrow{V} = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ et la surface S composée du cylindre d'équation $0 \leq z \leq b$ $(a > 0, b > 0)$ et des deux disques de rayon a aux niveaux $z = 0$ et $z = b$.

1. Calculer directement le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

2. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradski.

Exercice 11. (pour fixer les idées)

Les opérations suivantes ont-elles un sens? Si oui, définissent-elles un champ scalaire ou un champ vectoriel?

(a) Gradient de la divergence d'un champ vectoriel.
(b) Gradient de la divergence d'un champ scalaire.
(c) Divergence du gradient d'un champ scalaire.
(d) Divergence du gradient d'un champ vectoriel.
(e) Divergence de la divergence d'un champ scalaire.
(f) Rotationnel de la divergence d'un champ vectoriel.