TD N°2 D'Analyse

Promotion: $1^{ère}$ST

Equations différentielles

Exercice 1 *Soit l'équation différentielle:* $y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2$ *(1).*

1) *Déterminer la constante* $a > 0$ *telle que* $y_0(x) = ax$ *soit une solution particulière de l'équation (1),*

2) *Intégrer l'équation (1) en utilisant le changement de fonction* $y(x) = y_0(x) + \frac{1}{z(x)}$.

Exercice 2 *Soit l'équation différentielle:* $xy' + 5y = (2x + 5)\, e^{2x}$ *(E).*

1) *Vérifier que la fonction* $y_0(x) = e^{2x}$ *est une solution particulière de (E).*

2) *Donner la solution générale de l'équation (E).*

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles suivantes:*
1) $x^2y' = xy - y^2$, *2)* $xy' = y + x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$, *3)* $y'\cos x + y\sin x = \cos x$.

Exercice 4 *1) Intégrer l'équation* $y''\cos x + y'\sin x - y\cos^3 x = 0$ *sachant qu'elle admet une solution du type* $e^{a\sin x}$.

2) *Soit l'équation différentielle:* $x^2y'' - x\,(x + 2)\, y' + (x + 2)y = 0$ *(1). Déterminer* $k > 0$ *pour que* $y = x^k$ *soit une solution de l'équation (1). On pose* $y(x) = x^k z\,(x)$. *Quelle est alors l'équation différentielle vérifier par* z*? En déduire les solutions de l'équation (1).*

3) *Trouver toutes les fonctions* y *dérivables sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant* $y'\,(x) + y\,(-x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

4) *Intégrer les équations différentielles suivantes:*
1) $y'' + y = 3\cos 3x$, *2)* $y'' - y' = -2\sin x$, *3)* $y'' - 3y' + 2y = (x + 1)e^{2x}$, *4)* $y'' - 2y' + y = shx$.