SERIE 1 $\mathcal{maths}$ 2 ALGEBRE

Ex1: Déterminer les matrices (relativement aux bases canoniques) des applications linéaires suivantes :

1. $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$.
2. $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y, z) = x - 5y + 4z$.
3. $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y) = (x + y, x - y, y - x)$.

Ex2: Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. Peut-on effectuer les opérations : $A + B$? AB ? BA ? Si oui, calculer le résultat.

Ex3: Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que: $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)I_2 = 0$.

Ex4: On note $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $M^3 = A$. d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en remarquant que si $M^3 = A$ alors $AM = MA$.

Ex5: Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex6: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$; calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex7: Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$, en déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex8: <u>(supplémentaire)</u> On note $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $H(x) = A + xB$.

a) Calculer A^2, B^2, AB, BA.
b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}$ $H(x)H(y) = H(xy)$.
c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(H(x)\right)^n = H(x^n)$.
d) Calculer $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 10 & 30 & -20 \\ 9 & 27 & -17 \end{pmatrix}^{10}$. <u>Indication</u> : $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -6 \\ 10 & 30 & -20 \\ 9 & 27 & -17 \end{pmatrix} = H(10)$.